Série N° 1

I. Analyse Dimensionnelle

Exercice 1

La période d'oscillation d'un pendule dépend, à priori, de la longueur du pendule, de sa masse et de l'accélération gravitationnelle g.
En utilisant l'analyse dimensionnelle, déduire l'expression de la période à une constante près.

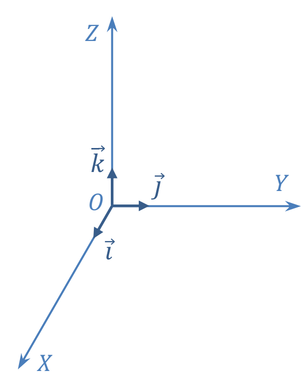
Exercice 2

Soit un gaz enfermé dans un récipient, la pression $\boldsymbol{P}$ qu'exerce ce gaz est due aux chocs des molécules sur les parois du récipient. Si on vous dit que cette pression dépend de la densité $\boldsymbol{n}$ (nombre de molécules$/m^3$), de la masse $\boldsymbol{m}$ de chaque molécule et de la vitesse moyenne $\overline{\boldsymbol{v}}$, trouver la formule de la pression $\boldsymbol{P}$.

II. Calcul Vectoriel

Exercice 3

1. Représenter sur la figure ci-contre le vecteur $\vec{V} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ ayant pour origine le point O.
2. Écrire en coordonnées cartésiennes le vecteur $\vec{W}$ de module $20\,u$ faisant un angle $\theta = 30°$ avec l'axe OZ et dont la projection sur le plan OXY fait un angle $\phi = 45°$ avec l'axe OX.



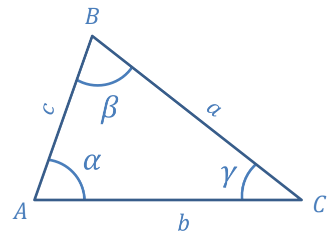
Exercice 4

Soient, dans un référentiel cartésien, deux vecteurs :

$$\begin{cases} \vec{A} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k} \\ \vec{B} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 6\vec{k} \end{cases}.$$

1. Trouver le module de chaque vecteur.
2. Calculer $\vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{A} - \vec{B}$.
3. Calculer $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (produit scalaire) et $\vec{A} \wedge \vec{B}$ (produit vectoriel).
4. Trouver l'angle β entre ces deux vecteurs.

Exercice 5



En utilisant le produit vectoriel, montrer que les angles et les côtés d'un triangle quelconque ABC sont reliés par la relation :

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Exercice 6

Soient les vecteurs :

$$\vec{v_1}=\sin t\,\vec{\imath}+\cos t\,\vec{\jmath}+t\vec{k},\ \vec{v_2}=e^{-t}\vec{\imath}+2\cos 3t\,\vec{\jmath}+2\sin 3t\,\vec{k}.$$

Calculer :

1. $\frac{d\vec{v_1}}{dt}$ et $\frac{d\vec{v_2}}{dt}$.
2. Le module de chacun de ces vecteurs.

Exercice 7

Une force $\vec{F}=5\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-2\vec{k}\ (N)$ provoque le mouvement d'un corps qui se déplace du point A au point B suivant le vecteur: $\overrightarrow{AB}=3\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-4\vec{k}\ (m)$.

1. Trouver le produit scalaire $W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ (le travail de la force $\vec{F}$ pour un déplacement $\overrightarrow{AB}$).
2. Déduire la projection de la force $\vec{F}$ sur le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$.
3. Trouver la relation entre les composantes du vecteur déplacement : $\vec{d}=\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}+\gamma\vec{k}$, pour que le travail de $\vec{F}$ soit nul.

Exercice 8

Soit $G(x,y,z)=3x^2+9xy-12yz-3xz+10xyz$ une fonction dans l'espace cartésien.

1. Calculer $\vec{D}=\overrightarrow{grad\,G}$.

Soit $\vec{C}(x,y,z)=(x^2+1)\vec{\imath}+(x+5z)\vec{\jmath}-(y^2+3x)\vec{k}$.

2. Calculer $\overrightarrow{rot\,\vec{C}}=\vec{\nabla}\wedge\vec{C}$.